*Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.

[9] L. Caffarelli, X. Ros-Oton, J. Serra, *Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries*, Invent. Math. **208** (2017), 1155–1211.

[10] L. Caffarelli, S. Salsa, *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*. Graduate Studies in Mathematics, 68. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[11] L. Caffarelli, L. Silvestre, *The Evans-Krylov theorem for nonlocal fully nonlinear equations*, Ann. of Math. **174** (2011), 1163–1187.

[12] L. Caffarelli, M. Soria-Carro, P. Stinga, *Regularity for $C^{1,\alpha}$ interface transmission problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **240** (2021), 265–294.

[13] L. Caffarelli, A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*, Ann. of Math. **171** (2010), 1903–1930.

# Cent anys de la visita d'Einstein

## Einstein i les matemàtiques

Sebastià Xambó Descamps
IMTech & BSC

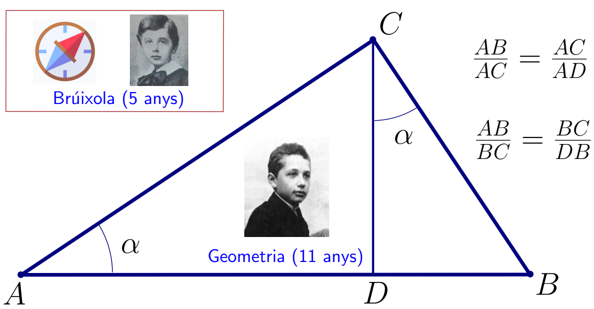
A Joan Girbau, *in memoriam*, per la seva humanitat i el seus llargs i fructífers mestratges.

Aquest escrit es basa en la conferència que vaig impartir a l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) el 3 de març de 2023 en l'ocasió de la inauguració de l'exposició "Einstein i l'actualitat de les seves contribucions", promoguda per Antoni Roca Rosell en commemoració de la visita d'Albert Einstein a Barcelona el febrer de 1923. També he aprofitat alguns matisos de la sessió impartida a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB) el 17 d'abril a l'assignatura "Albert Einstein i la Ciència i la Tècnica del segle XX" (4t curs del Grau d'Enginyeria Industrial de la UPC) arran de l'amable invitació de la professora responsable de l'assignatura, Maria Rosa Massa.

Si no es declara altrament, les citacions són traduccions al català de fragments de les notes autobiogràfiques d'Einstein, [1], i en aquest cas els èmfasis no estan a l'original.

### Un sagrat llibre de geometria

A la seva autobiografia [1] podem llegir: "Als 12 anys vaig viure una segona meravella d'una naturalesa totalment diferent [la primera, als 5 anys, fou l'encís que li produí una brúixola]: un petit llibre de geometria plana euclidiana que va arribar a les meves mans a principis del curs escolar. Afirmacions no evidents, com per exemple que les tres altures d'un triangle es tallen en un punt, es podien demostrar amb tanta certesa que qualsevol dubte semblava fora de qüestió. *Aquesta lucidesa i certesa em van causar una impressió indescriptible*." I tot seguit recorda que "un oncle [Jacob Einstein] em va explicar el teorema de Pitàgores [i la demostració d'Euclides, que trobà complicada] abans d'obtenir *aquell sagrat llibret de geometria*. Després de molt d'esforç vaig aconseguir provar aquest teorema sobre la base de la semblança dels triangles." Els estudiosos consideren que es tracta de la demostració [coneguda, però nova per a ell] basada en la semblança del triangle $ABC$ amb els triangles $ACD$ i $CBD$ de la Figura 1, [2].




$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB^2$$

Figura 1. Dues fascinacions cognitives d'infantesa

"Des dels dotze als setze anys em vaig familiaritzar amb els elements de les matemàtiques juntament amb els principis del *càlcul diferen-*

*cial i integral. En fer-ho vaig tenir la sort de trobar llibres que no eren massa particulars en el seu rigor lògic, però que ho compensaven deixant que els pensaments principals destaquessin clarament i sinòpticament.* Aquesta ocupació era, en conjunt, realment fascinant; es van assolir clímaxs comparables amb els de la geometria elemental: la idea bàsica de la *geometria analítica, les sèries, els conceptes de diferencial i integral.*"

Està documentat (per exemple a [3]) que durant l'escolarització al Luitpold-Gymnasium de Munic (1888-1895) tingué a A. Sickenberger com a professor de matemàtiques i que en conseqüència estudià els seus diversos textos sobre matemàtica elemental (entre els quals, probablement, el sagrat llibre de geometria). Cal remarcar també la influència de Max Talmud, un estudiant de medicina que els Einstein van acollir a casa seva a dinar els dijous des de 1889 a 1894. Talmud tenia onze anys més que Einstein i tingué un paper de mentor. Per exemple, Einstein aprengué per si sol als catorze anys el càlcul diferencial i integral estudiant un llibre de H. B. Lübsen proporcionat per Talmud.

"També vaig tenir la sort de conèixer els resultats i mètodes essencials de tot el camp de les ciències naturals en una excel·lent exposició popular, que es va limitar gairebé en tot moment a aspectes qualitatius, una obra de cinc o sis volums que vaig llegir amb una atenció sense alè." Finalment, "havia estudiat ja una mica de *física teòrica* i, als disset anys, vaig entrar a l'Institut Politècnic de Zuric [ETH]."

## Estudiant a l'ETH

Primer un incís. Einstein abandonà els estudis al Luitpold Gymnasium de Munic a finals de desembre de 1894 (als quinze anys). Sembla que fou una reacció a desavinences amb algun professor, potenciada per l'enyorança de la seva família, que havia traslladat el seu negoci familiar al nord d'Itàlia per intentar superar les dificultats econòmiques amb què es trobà a Munic. El cas és que Einstein viatja a Itàlia, on passa sis mesos, decideix renunciar a la nacionalitat alemanya (on hauria d'haver fet dos anys de servei militar), i als setze anys és admès als exàmens d'ingrés a l'ETH de Zuric. Té dos anys menys que l'edat normal d'entrada i no reïx: tot i treure bones notes de matemàtiques i física, suspèn llengües modernes, zoologia i botànica.

A suggeriment del director de l'ETH, es matricula a un curs preparatori a l'escola cantonal d'Aarau, el certificat del qual equivalia a la superació de l'examen d'entrada a l'ETH (en l'avaluació final dels estudiants hi participaven professors d'aquesta escola). Del seu curs, va ser el millor en àlgebra, geometria, física i alemany, i notable en geometria descriptiva i química. En canvi, va ser dels darrers en dibuix i dibuix tècnic, francès i geografia. La mala puntuació de francès contrasta amb el contingut premonitori de l'assaig que va escriure per a l'examen (amb faltes d'ortografia i de gramàtica), ja que hi va exposar amb tota precisió què esperava aconseguir, si obtenia el diploma, amb la carrera universitària, [3]. Obtingut el diploma, va entrar a l'ETH com a estudiant de Matemàtiques i Física. Entre els seus companys d'estudis, Marcel Grossmann i Mileva Marić tindran un paper important en la vida d'Einstein. D'aquella etapa (1896-1900), a l'autobiografia diu:

"Allà vaig tenir professors excel·lents (per exemple, Hurwitz i Minkowski), de manera que realment *podria haver obtingut una bona educació matemàtica.* Tanmateix, vaig treballar la major part del temps al laboratori de física, fascinat pel contacte directe amb l'experiència. La resta del temps el vaig passar principalment a casa estudiant els treballs de Kirchhoff, Helmholtz, Hertz, etc. El fet de descuidar *fins a cert punt* les matemàtiques no era a causa només del meu més gran interès per les ciències naturals, sinó també per la impressió que les matemàtiques estaven dividides en nombroses especialitats, cadascuna de les quals podia acaparar fàcilment la curta vida que ens és concedida. En conseqüència, em vaig veure en la posició de l'*ase de Buridan*, que era incapaç de decidir a quin feix de fenc dirigir-se. Això raïa, òbviament, en en el fet que *la meva intuïció no era prou forta en el camp de les matemàtiques* per diferenciar clarament el fonamentalment important, allò que és realment bàsic, de la resta de l'erudició més o menys prescindible." Més endavant declara que en la seva època d'estudiant "no comprenia encara que l'*accés als coneixements fonamentals i més profunds de la física anava* *lligat als mètodes matemàtics més subtils, una constatació que va anar capint en el decurs d'anys de treball científic independent.*"

"Només hi havia dos exàmens finals; altrament es podia fer més o menys el que un volgués, especialment, com era el meu cas, si comptava amb un amic [Marcel Grossmann] que assistia regularment a les classes i em deixava els seus acurats apunts. Això em donava llibertat en l'elecció de les meves ocupacions fins pocs mesos abans de l'examen, llibertat de la qual jo vaig gaudir plenament i a canvi de la qual pagava molt a gust, com a mal molt menor, la mala consciència que comportava."

I així obté, el juliol de 1900, el diploma de l'ETH, junt amb tres companys de promoció (Mileva Marić no és aprovada en aquesta ocasió, com tampoc en la següent, juliol de 1901), i mentre aquells tres obtenen una plaça d'ajudant a l'ETH, ell no ho aconsegueix, i de fet tampoc obté, en els pròxims dotze mesos, un lloc de treball estable en institucions públiques, però sí diversos contractes temporals en privades.

Tanmateix, el desembre de 1900 acaba un article sobre capil·laritat (forces intermoleculars) que és acceptat als *Annalen der Physik*. És el seu primer article científic. El febrer de 1901 obté la nacionalitat suïssa, que no abandonarà mai, i es deslliura del servei militar (peus plans i varius). També presenta, el novembre de 1901, una tesi doctoral a la Universitat de Zuric (sobre un tema de teoria cinètica dels gasos), que no és admesa. A principis de 1902 s'estrena com a pèrit de tercera classe a l'Oficina Suïssa de Patents (OSP), a Berna, el 1903 contreu matrimoni amb Mileva Marić i el 1904 neix el seu fill Hans Albert, que arribarà a ser un enginyer prestigiós.

En el front científic, de 1902 a 1904 publica quatre articles més als *Annalen der Physik*. Versen sobre diversos aspectes de termodinàmica i física estadística i, sens dubte, foren molt importants per al seu desenvolupament científic, però no afegien gaire al que ja era conegut. Per exemple, el mateix Einstein explica que "no estant familiaritzat amb les investigacions de Botzmann i Gibbs que havien aparegut anteriorment, i que *realment esgotaven el tema*, vaig desenvolupar la mecànica estadística i, basant-me en ella, la teoria cineticomolecular de la termodinàmica." El 1910 va escriure que si hagués conegut el llibre de Gibbs no hauria publicat els articles sobre els fonaments de la mecànica estadística, llevat d'alguns comentaris, [4]*pàg. 55.

### 1905: Annus mirabilis

El 17 de març acaba l'article [5] sobre la hipòtesi dels quanta de llum. El 30 d'abril completa la memòria "Sobre una nova determinació de les dimensions moleculars" [6], dedicada 'al meu amic Sr. Dr. M. Grossmann', que presenta com tesi doctoral a la Universitat de Zuric (acceptada el 15 de juliol). L'11 de maig, l'article sobre moviment brownià [7] és rebut als *Annalen der Physik* (en ell mostra que partícules de l'ordre d'una micra suspeses en un líquid han d'experimentar, a causa dels xocs que reben de les molècules d'aquest líquid, un determinat moviment aleatori, explicant així per primera vegada les observacions de Robert Brown un segle abans per diverses menes de partícules). La mateixa revista rep tres articles més: 30 de juny, primer article sobre relativitat especial, [8]; 27 de setembre, segon article sobre relativitat especial [9] (estableix la fórmula $E = mc^2$); 19 de desembre, un segon article sobre le moviment brownià, [10]. Vegeu [4]*pp. 111-2 per l'extraordinari impacte d'aquest articles en termes del nombre de citacions fins aquell moment, un nombre que no ha parat de créixer fins avui. En aquest impacte sobresurten [6], que va establir definitivament l'existència d'àtoms i les seves dimensions (negada per prominents figures, especialment E. Mach, que adduïa que no eren observables), i els articles sobre el moviment brownià, dels quals R. Penrose diu, en el seu pròleg a [11], que l'anàlisi d'Einstein *per si sola li hauria valgut un lloc en la història*, ja que, "va establir les bases d'una part important del coneixement estadístic que ha tingut enormes implicacions en nombrosos camps" (Smolouchowski, en treballs independents, aconseguí resultats similars).

És molt oportú citar aquí el magnífic llibre [12], que no només reprodueix els articles [5], [7] i [8] en versió original i en excel·lents traduccions al català, sinó que de cadascun se'n presenta el seu context històric, un estudi del seu contingut, i una apreciació del seu impacte. A més, el primer capítol ("Un jove agosarat i feliç"), junt amb una acurada cronologia que el precedeix, conformen una admirable semblança d'Albert Einstein.

### Relativitat especial

Entre els articles de 1905 mereixen una atenció particular els de relativitat, [8] i [9], reproduïts a [13]. Mentre que els altres quatre són exemples superlatius de modelització físico-matemàtica, tots coronats per valuosos descobriments i aplicacions, els de relativitat són els que han tingut una significació més profunda i general, tant física com matemàtica, i Einstein és conscient que configuren un paradigma que supera el de l'espai i temps absoluts, incloent-hi el concepte d'èter com a mitjà en el qual es propaga la llum: "Newton, perdona'm; tu vas trobar l'únic camí que a la teva època era encara possible per a un home de màxima capacitat intel·lectual. Els conceptes que vas crear continuen regint el nostre pensament físic, encara que *ara sabem que cal substituir-los per altres de més allunyats de l'esfera de l'experiència immediata si aspirem a una comprensió més profunda de la situació*".

L'article [8], sense referències explícites a cap treball anterior, postula el *principi de relativitat* (*especial* o *restringit*, introduït per H. Poincaré un any abans, segons el qual *les lleis de la física* han de tenir la mateixa forma en tots els sistemes inercials) i el principi de *constància de la velocitat de la llum, c, en tots els sistemes inercials, independentment de l'estat de moviment del focus emissor*. Que les lleis de la mecànica satisfan el principi de relativitat estava entès des de Galileu, però les equacions de Mawxell no són invariants per les transformacions de Galileu i, per tant, el principi de relativitat implica que les transformacions entre sistemes inercials no poden ser les de Galileu. Pel que fa a la (gens intuïtiva) constància de $c$, de fet es dedueix de les equacions de Maxwell del camp electromagnètic, ja que la velocitat de propagació de les ones electromagnètiques en el buit resulta ser $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, on les constants $\varepsilon_0$ (permitivitat elèctrica del buit) i $\mu_0$ (permeabilitat magnètica del buit) no depenen, pel principi de relativitat, del sistema inercial. Aquesta observació no és esmentada fins a [9] (nota a peu de pàgina: "El principi de la constància de la velocitat de la llum de fet es desprèn de les equacions de Maxwell"). Tampoc esmenta resultats que n'aportaven evidència experimental, com ara els de Michelson-Morley. Dos anys després, escriu l'article de revisió [14] a petició de J. Stark, l'editor de la revista *Jahrbuch der Radioactivität und Elektronik* (Anuari de Radioactivitat i Electrònica), i és una mica més explícit pel que fa a les arrels de la seva teoria de la relativitat, i especialment al paper de la teoria de l'electró de H. A. Lorentz, però ignorant, com ho seguirà fent tota la seva vida, les importants aportacions de Poincaré a la teoria de la relativitat (v. [15]).

L'article [14] conté cinc parts. Les tres primeres s'ocupen de la relativitat restringida: cinemàtica (transformacions de Lorentz), electrodinàmica, i dinàmica d'una partícula. El títol de les altres dues seccions és "Sobre mecànica i termodinàmica dels sistemes", i "Principi de relativitat i gravitació" (aquí hi ha la llavor, "el pensament més feliç de la meva vida", que en el període 1911 a 1915 fructificarà en la relativitat general, és a dir, la teoria relativista del camp gravitatori). La part cinemàtica, que posa de manifest el paper fonamental del grup de Lorentz com a base de la física, és la que té un contingut més matemàtic.

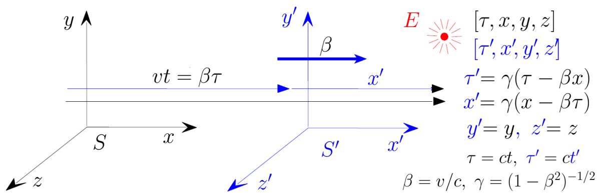



Figura 2. Transformació de Lorentz entre dos sistemes inercials, $S$ i $S'$. Si $t$ i $t'$ s'expressen en segons, $\tau$ i $\tau'$ són distàncies donades en segons-llum.

És adient esmentar aquí que el principi de relativitat de fet implica que existeix una constant universal $\mathfrak{c} \in (0, \infty]$ tal que les equacions que relliguen les coordenades $\mathbf{r} = [\tau, x, y, z] = [\tau, \boldsymbol{x}]$ d'un esdeveniment en un sistema inercial $S$ amb les coordenades $\mathbf{r}' = [\tau', x', y', z'] = [\tau', \boldsymbol{x}']$ en un altre sistema inercial $S'$ com en la figura 2 ($\tau = ct$, $\tau' = ct'$, $t$ i $t'$ els corresponents temps) tenen necessàriament la forma

$$\tau' = \gamma(\tau - \beta x),\ x' = \gamma(x - \beta\tau),\ y' = y,\ z' = z,$$

on $\beta = \beta(v) = v/\mathfrak{c} \in [0, 1]$, $v$ la velocitat de $S'$ respecte de $S$, i $\gamma = \gamma(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Si $\mathfrak{c} = \infty$, llavors $\beta = 0$, $\gamma = 1$ i les equacions esdevenen les transformacions de Galileu ($x' =$

$x - vt$, $t' = t$). Altrament, les equacions tenen la forma de les *transformacions de Lorentz* (aquesta nomenclatura és deguda a Poincaré) per a la velocitat $\mathfrak{c}$. A més, la llei de composició de velocitats té necessàriament la forma

$$v'' = (v + v')/(1 + \beta(v)\beta(v')),$$

on $v'$ i $v''$ són les velocitats d'un tercer sistema $S''$ respecte de $S'$ i de $S$, respectivament. De nou, si $\mathfrak{c} = \infty$ tenim la composició de velocitats de Galileu, $v'' = v + v'$, i altrament és la *composició relativista de velocitats* per la velocitat límit $\mathfrak{c}$. Atès que la llum emesa per mesons que van quasi a la velocitat $c$ també es propaga a la velocitat $c$, es desprèn que de fet $\mathfrak{c} = c$. Per aquestes consideracions vegeu [16]*§2.11, que comenta: "Així el principi de relativitat necessàriament implica que tots els sistemes inercials estan relacionats per transformacions de Galileu o per transformacions de Lorentz relatives a una certa constant universal '$c$' [$\mathfrak{c}$]. El paper del segon axioma [d'Einstein] és distingir aquestes dues possibilitats i [decidir] fixar el valor de $c$ com el de la velocitat de la llum. Per a una discussió més matemàtica d'aquestes precisions vegeu [17]*§10.7.

Els resultats de la part electromagnètica es poden resumir en la taula següent, on $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ denota el camp elèctric i $\boldsymbol{M} = c\boldsymbol{B} = c(B_x, B_y, B_z)$, $\boldsymbol{B}$ és el camp magnètic, i anàlogament per al sistema $(x', y', z')$:

| | |
|---|---|
| $E_x = E_{x'}$ | $M_x = M_{x'}$ |
| $E_y = \gamma(E_{y'} + \beta M_{z'})$ | $M_y = \gamma(M_{y'} - \beta E_{z'})$ |
| $E_z = \gamma(E_{z'} - \beta M_{y'})$ | $M_z = \gamma(M_{z'} + \beta E_{y'})$ |

Aquestes transformacions posen de manifest que en l'expressió de $\boldsymbol{E}$ intervenen $\boldsymbol{E'}$ i $\boldsymbol{M'}$, i el mateix passa amb $\boldsymbol{M}$. Per velocitats $v \ll c$, s'obté $\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{E'}$ i $\boldsymbol{M} \approx \boldsymbol{M'}$, que són les relacions vàlides en el paradigma no relativista. Un cas particular mostra que el camp magnètic és de fet un efecte relativista del camp elèctric de Coulomb. En efecte, suposant que a l'origen de $S'$ hi ha una càrrega puntual immòbil i cap camp magnètic, llavors $\boldsymbol{M} = (0, -\gamma\beta E_{z'}, \gamma\beta E_{y'})$, que és ortogonal a la direcció del moviment $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)$ i al camp elèctric $\boldsymbol{E} = (E_{x'}, \gamma E_{y'}, \gamma E_{z'})$. Un càlcul immediat mostra que de fet $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}$.

Pel que fa a la part dinàmica, les nocions més innovadores van ser que la massa creix amb la velocitat, tendint a $\infty$ quan $\beta \to 1$ ($v \to c$): $m = \gamma m_0$, on $m_0$ és la massa en repòs. La velocitat relativista és el 4-vector $\mathbf{u} = [\gamma, \gamma\boldsymbol{u}]$, on $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ és la 3-velocitat i $\gamma = \gamma_u$ el factor $\gamma$ d'aquesta velocitat. El moment relativista és el 4-vector $\mathbf{p} = m_0\mathbf{u} = [m, m\boldsymbol{u}]$ i la força relativista és el 4-vector $\mathbf{f} = \gamma\dot{\mathbf{p}} = \gamma[\dot{m}, \dot{\boldsymbol{p}}]$ (per a detalls, incloent-hi la deducció de $E = mc^2$, podeu consultar l'arxiu Relativitat). Aquesta dinàmica relativista és a la base dels càlculs que regulen el comportament dels acceleradors de partícules, a les que usualment corresponen factors $\gamma$ molt grans, i de la comptabilitat energia-massa en la síntesi o desintegració de partícules.

El significat geomètric de la relativitat especial fou descobert per a H. Minkowski [18]. L'observació fonamental és que les transformacions de Lorentz coincideixen amb les que deixen invariant la forma quadràtica

$$\eta = \eta(\mathbf{r}) = \tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \tau^2 - \boldsymbol{x}^2.$$

Que les transformacions de Lorentz vistes anteriorment conserven $\eta$ (es diu que són *isometries* d'$\eta$) és una simple comprovació algebraica. El recíproc, que tota isometria d'$\eta$ és una transformació de Lorentz (general), és més delicat i aquí el passem per alt, però en tot cas queda clar que la relativitat especial es pot veure com la geometria, en el sentit de F. Klein, del grup $O_{1,3}$ d'isometries d'$\eta$. En aquesta presentació hi encaixa perfectament la dinàmica i l'electrodinàmica, i l'article acabà essent un primer pas necessari envers la relativitat general.

Val a dir, a més, que en l'estudi de les isometries de formes quadràtiques de qualsevol signatura el formalisme més adient és el de l'àlgebra geomètrica de Clifford. En el cas de la relativitat, aquest punt de vista està exposat, per exemple, a [19]*§1.4 i Cap. 3, on es mostra també la seva idoneïtat per al tractament de l'equació de Dirac. Com a referència general sobre aquests formalismes, vegeu [20]*Caps. 3-5. En les dues referències s'aporta una àmplia bibliografia.

## Relativitat general

És una teoria relativista de la gravitació i es considera l'obra mestra d'Einstein [21]. En la seva elaboració van tenir un paper fonamental dos principis. El primer va ser "la idea més feliç de la meva vida" (1907: en una caiguda lliure no es percep la força de la gravetat), que el va dur a postular el *principi d'equivalència* (igualtat entre massa inercial i massa gravitatòria). Això el portà a concebre "l'equivalència física completa d'un camp gravitatori i una acceleració igual del sistema de referència" i a deduir l'alentiment dels rellotges sota un potencial gravitatori i, en particular, l'augment de la longitud d'ona de les ratlles espectrals emeses per àtoms del Sol (per exemple).

El segon principi és el *principi de relativitat general*, que postula que les lleis de la física han de tenir la mateixa forma no només en coordenades inercials, sinó en qualsevol sistema de coordenades, un enunciat al qual es refereix també com a *covariància* respecte de canvis arbitraris de coordenades.

Matemàticament, això significa que el model de l'univers d'esdeveniments ha de ser una varietat (diferenciable) $\mathcal{M}$ de dimensió 4, i que les lleis físiques s'han de poder expressar en termes de la geometria intrínseca d'aquesta varietat. A l'autobiografia Einstein reconeix que la dificultat principal que va haver de superar per arribar a aquesta comprensió va ser "alliberar-se de la idea que les coordenades han de tenir un significat mètric immediat".

El treball inicial de 1907, [14], és represès a partir de 1911. El 1912, en una carta a Sommerfeld, "creu que pot superar totes les dificultats amb l'ajut de M. Grossmann" i afegeix: "Però una cosa és certa: *mai a la meva vida m'havia preocupat tant per res, i ara veig amb un enorme respecte les matemàtiques, les parts més subtils de les quals considerava fins ara, en la meva ignorància, com un pur luxe!* En comparació amb aquest problema, la teoria especial de la relativitat és un joc de nens".

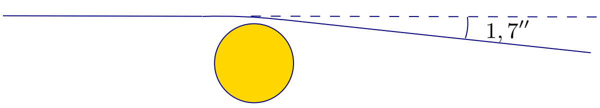



Figura 3. Desviació d'un raig de llum pel camp gravitatori del Sol

En versions preliminars, explica l'avançament de $43''$ d'arc per segle del periheli de Mercuri i obté que la desviació d'un raig de llum que passa prop del Sol és $1,7''$ (corregeix el valor de $0,84''$ d'arc obtingut el 1911), un valor que es va confirmar per les observacions d'un eclipsi de Sol l'any 2019 i també en eclipsis posteriors.

A la 6a edició de l'article "The meaning of relativity", [22]*Ap. II, llegim: "Els coneixements matemàtics que van permetre establir la teoria general de la relativitat els devem a les investigacions geomètriques de Gauss i Riemann". I de Gauss diu: "Va investigar les propietats mètriques d'una superfície de l'espai euclidià tridimensional, i demostrà que aquestes propietats es poden descriure mitjançant conceptes que es refereixen només a la superfície mateixa [conceptes intrínsecs] i no a la seva relació amb l'espai ambient [extrínsecs]. Com que, en general, no existeix un sistema de coordenades preferit en una superfície, *aquesta investigació va portar per primera vegada a expressar les magnituds rellevants en coordenades generals*". A celebrar aquí la publicació d'*Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas de C. F. Gauss*, de n'Agustí Reventós i en Carlos Rodríguez, que podeu trobar al web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM), i el tractament que fan del *theorema egregium* segons el qual la curvatura, que es defineix extrínsecament, resulta ser un concepte intrínsec.

I de Riemann diu, *loc. cit.*, "Riemann va estendre la teoria de superfícies de Gauss a espais d'un nombre arbitrari de dimensions (espais amb mètrica riemanniana, *que es caracteritza per un camp tensorial simètric de segon rang*). En aquesta admirable investigació va trobar l'expressió general de la curvatura en espais mètrics de dimensions superiors". En el desevolupament de la relativitat general, Marcel Grossmann va tenir un paper important assistint a Einstein en l'assimilació del càlcul tensorial i en particular del càlcul absolut de Ricci i Levi-Civita. El 1913 van publicar l'article conjunt [23]. És un esbós de la teoria dividit en una part física, a càrrec d'Einstein, i una part matemàtica, a càrrec de M. Grossmann.

És un bon moment per explicar que la varietat $\mathcal{M}$ ve dotada d'una mètrica natural (tensor simètric covariant d'ordre 2). En efecte, en una referència local en caiguda lliure hi ha, en ser equivalent a un sistema inercial, la mètrica $ds^2 = dx_0^2 - d\boldsymbol{x}^2 = \eta(dx_0, d\boldsymbol{x})$ de Minkowski (on posem $x_0 = \tau$ i $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$), que en coordenades arbitràries $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ té la forma (usant la regla de sumació respecte d'índexos repetits) $ds^2 = g^{jk} dx_j dx_k$, $j, k \in 0..3$ ($g^{jk}$ funcions de les coordenades $x$) i en principi l'única restricció és que la seva signatura ha de ser $(1, 3)$, que és la signatura d'$\eta$. Com és costum, posarem $g$ per denotar aquesta mètrica i direm que $(\mathcal{M}, g)$ és un *espai-temps*. És l'arena en la qual es desenvolupen les investigacions d'Einstein i en les quals atribueix el paper de *potencials gravitacionals* a les $g^{jk}$, ja que són indicadors de la desviació del sistema de coordenades respecte d'un sistema inercial (una precisió tècnica: l'indicador en realitat és la curvatura de $g$ en el sentit de Riemann). Dit això, l'objectiu principal és trobar les condicions que han de satisfer aquests potencials per tal que corresponguin a la gravetat causada per la distribució de matèria-energia a $\mathcal{M}$, i al final aquestes condicions queden codificades en les *equacions d'Einstein*.

Acabem de revisar en quines circumstàncies hi va arribar. El 1915 imparteix un seminari sobre relativitat a Göttingen. Hi assisteixen Hilbert, Klein i Weyl, i Hilbert envia als *Annalen der Physik* les equacions relativistes del camp gravitatori (obtingudes resolent un determinat problema variacional) cinc dies abans que ho fes Einstein, però els erudits han mostrat que la prioritat és d'Einstein (v. l'article "Einstein, Felix Klein, David Hilbert y Hermann Weyl" de Sánchez-Ron en el Volum Einstein de l'FME [24]).

No podent entrar en profunditat en el tema, em limitaré a descriure breument els malabarismes finals: les analogies que el van guiar i, fins on em sigui possible, mostrar que són ben plausibles. Com a referència per a discussions més detallades, especialment pel que fa a nocions de càlcul tensorial, és molt recomanable el magistral llibre de J. Girbau, [25].

En la gravetat de Newton i en l'electroestàtica de Coulomb les forces entre partícules són inversament proporcionals al quadrat de les distàncies. Amb aquesta propietat es pot construir, per una distribució $Q$ de masses o càrregues elèctriques, una funció $\phi$ (*potencial gravitatori* o *electroestàtic*) tal que el seu gradient, $\nabla\phi = (\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$, determina la força que $Q$ exerceix sobre una unitat de massa o càrrega en el punt on avaluem $\nabla\phi$. A més, aquest potencial satisfà l'*equació de Poisson*: $\Delta\phi = k\rho$, on $\Delta\phi = \nabla^2\phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\phi$ és la laplaciana de $\phi$, $\rho$ és la densitat (de massa o càrrega elèctrica) de $Q$ i $k$ és una constant ($k = 4\pi G$ en el cas de la gravetat, $G$ la constant de la gravitació, i $k = -1/\varepsilon_0$ en el cas del camp elèctric; els signes contraris provenen del fet que càrregues del mateix signe es repel·leixen, mentre que dues masses sempre s'atrauen). Per a una referència online relativa al cas electroestàtic podeu consultar l'arxiu Potencial Elèctric (el cas gravitacional es pot tractar de la mateixa manera). En tot cas, l'estratègia d'Einstein per derivar la seva equació consisteix a imaginar quina forma hauria de tenir l'equació de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ en l'espai temps.

En l'espai-temps, el paper de $\phi$ el juga, com hem vist, la mètrica $g$ i, per tant, és natural canviar $\Delta\phi$ per una expressió $\mathcal{E}(g)$ formada amb derivades parcials de $g$ fins l'ordre 2. Per altra banda $\rho$ s'ha de substituir per un objecte que expressi el contingut de matèria-energia-moment en cada punt de $\mathcal{M}$. Aquest objecte és el *tensor de tensió-energia* (també anomenat d'*energia-impuls* o d'*energia-moment*), $T \sim T_{\mu\nu}$ (per a una discussió detallada, v. [25]*Cap. 16). Per tant l'equació d'Einstein adopta la forma $\mathcal{E}(g) = \kappa T$, $\kappa$ una constant (*constant d'Einstein*), i com que $\mathrm{div}(T) = 0$, $\mathcal{E}(g)$ ha de ser també un tensor d'ordre 2 amb divergència nul·la. I bé, un resultat de Poincaré afirma que sota aquestes condicions $\mathcal{E}(g) = \mathsf{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g$, on $\mathsf{Ric}(g) \sim R_{jk}$ és el tensor de Ricci de $g$, $R$ és la curvatura escalar de $g$ i $\Lambda$ una constant arbitrària, d'on resulta que l'equació d'Einstein ha de tenir la forma

$$\mathsf{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = \kappa T.$$

La determinació de $\kappa$ via l'aproximació newtoniana va produir l'expressió $\kappa = 8\pi G/c^2$. Inicialment Einstein va considerar el cas $\mathcal{E}(f) = \mathsf{Ric}(g)$, però l'equació que en resulta, $\mathsf{Ric}(g) = T$ és incorrecta, ja que $\mathrm{div}(T) = 0$ i en general $\mathrm{div}(\mathsf{Ric}(g)) \neq 0$. L'elecció $\mathcal{E}(g) = \mathsf{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg$ ja no té aquest defecte, perquè resulta que $\mathrm{div}(\mathsf{Ric}(g)) = \frac{1}{2}Rg$ (que és la raó per la qual va introduir aquest terme). El terme $\Lambda g$ és opcional, ja que $\mathrm{div}(g) = 0$, i Einstein el va introduir [26] per aconseguir un model d'univers estacionari, que de fet no ho era, després el va treure en conèixer l'expansió de l'univers (l'equació d'Einstein implica aquesta expansió, i per tant el que s'anomenà *big-bang*, però sembla que no se n'adonà fins al 1929). Ara s'inclou $\Lambda$ a causa de l'acceleració de l'expansió de l'univers.

La inclusió del terme $-\frac{1}{2}Rg$ a $\mathcal{E}(g)$ és un pas anàleg a la manera com Maxwell va modificar l'equació d'Ampère de la magnetoestàtica ($\mathrm{rot}(\boldsymbol{B}) = \mu_0\boldsymbol{j}$, on $\boldsymbol{j}$ és el vector de densitat de corrent i $\boldsymbol{B}$ el camp magnètic) a l'electrodinàmica. En aquest cas, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\boldsymbol{B})) = 0$, però en canvi, aplicant la llei de conservació de la càrrega elèctrica ($\partial_t\rho = -\mathrm{div}(\boldsymbol{j})$), tenim $\mathrm{div}(\mu_0\boldsymbol{j}) = \mu_0\mathrm{div}(\boldsymbol{j}) = -\mu_0\partial_t\rho$, que no s'anul·la per a corrents no estacionaris. Ara bé, $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \rho/\varepsilon_0$ (llei de Coulomb-Gauss) i així $\partial_t\rho = \partial_t(\mathrm{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E})) = \mathrm{div}(\varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{E})$, d'on es desprèn que $\mathrm{div}(\mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{E}) = 0$. Vista d'aquesta igualtat, Maxwell va decidir modificar la llei d'Ampère en la forma $\mathrm{rot}(\boldsymbol{B}) = \mu_0(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{E})$ (equació d'Ampère-Maxwell), és a dir, sumant a $\boldsymbol{j}$ l'expressió $\varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{E}$, a la qual va anomenar *corrent de desplaçament*.

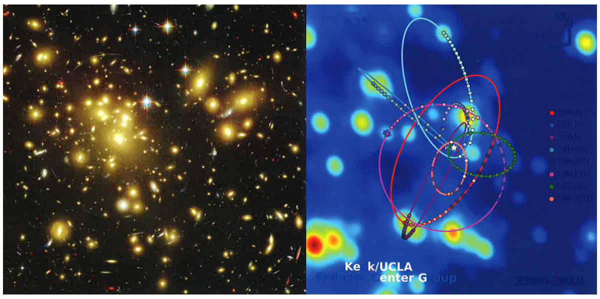


Figura 4. Gauss, amb la teoria de superfícies, va poder fer topografia terrestre. Einstein, amb la geometria riemanniana i la relativitat general, ha fet possible elaborar una topografia de l'univers.

Acabo amb una apreciació de Sir Michael Atiyah: "Einstein va iniciar i va destacar el paper de la geometria en la física fonamental. Cinquanta anys després de la seva mort, els vincles entre la geometria i la física s'han estès significativament amb beneficis per a ambdues parts. A diferència de Newton, Einstein no era un matemàtic. Va utilitzar les matemàtiques d'una manera essencial, però no les va crear i va confiar en els seus col·legues per a l'ajuda tècnica. *És encara més notable que les seves idees hagin provocat grans avenços en geometria, fins i tot en parts del tema aparentment allunyades de la física*" [27]*M. Atiyah, "Einstein and Geometry", 15-23.


## Inicis

Em plau reconèixer i agrair a l'enginyer Miquel Perals i Descamps les entusiastes explicacions sobre Einstein i la relativitat quan jo estava a sisè de batxillerat i ell acabant la carrera. Sense aquelles converses molts dels gaudis que m'ha aportat l'estudi d'aquests temes al llarg dels anys potser no haurien existit.


## Referències


[1] A. Einstein, *Autobiographical notes.* Open Court Publishing, 1949. Incloses, en alemany i anglès, a: Paul Arthur Schilpp, editor, *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (pàgines 1-95). The Library of Living Philosophers, Tudor Publishing Company, 1951. Publicades en castellà, amb el títol *Albert Einstein, Notas autobiográficas* i un pròleg de P. A. Schilpp, per Alianza Editorial (libro de bolsillo) el 1984.

[2] G. J. Holton and Y. Elkana (editors), *Albert Einstein: Historical and cultural perspectives.* Dover Publications, 1997. L'article de B. Hoffmann, "Some Einstein anomalies" (pàgines 91-105), dedica la primera secció a la Geometria (pàgines 91-93) i pondera el fet que la demostració d'Einstein del teorema de Pitàgores es produís abans de conèixer el 'sagrat' llibre de geometria.

[3] L. Pyenson, *Einstein's education: Mathematics and the laws of nature.* Isis **71**/3 (1980), 399-425.

[4] A. Pais, *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein.* Oxford University Press, 1983. Edició revisada, 2005, amb un pròleg de Roger Penrose.

[5] A. Einstein, "Über einem die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" (Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de la llum). *Annalen der Physik*, ser. 4, vol. 17, 132-148. Aquest article, junt amb el publicat el 1906 a la mateixa revista ("Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption" (Teoria de la generació i absorció de la llum), ser. 4, vol. 20, 199-206) presenten l'equació fonamental de l'efecte fotoelèctric (resultat pel qual se li va atorgar el premi Nobel l'any 1921).

[6] A. Einstein, "Eine neue Bestimmung der Moleküldimenionen" (Una nova determinació de les dimensions moleculars). Es va publicar el

1906 a *Annalen der Physik*, ser. 4, vol. 19, 371-381.

[7] A. Einstein, "Über die von der molekulärkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen" (Sobre el moviment de les partícules en suspensió en líquids en repòs que exigeix la teoria cineticomolecular de la calor). *Annalen der Physik*, ser. 4, vol. 17, 549-560.

[8] A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment). *Annalen der Physik*, ser. 4, vol. 17, 891-921.

[9] A. Einstein, "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?" (Depèn la inèrcia d'un cos de la seva energia?). *Annalen der Physik*, ser. 4, vol. 18, 639-641.

[10] A. Einstein, "Zur Theorie der Brownschen Bewegung" (Sobre la teoria del moviment brownià). *Annalen der Physik*, ser. 4, vol. 19, 371-381.

[11] John Stachel (editor), *Einstein miraculous year. Five Papers That Changed the Face of Physics*, with a Prolog by Roger Penrose. Princeton University Press, 1998. Versió al castellà de Javier García Sanz publicada per Crítica l'any 2001 amb el títol *Einstein 1905: un año milagroso*. L'ordre en què analitza els cinc treballs és com segueix: [6], [7], [8], [9] i [5].

[12] E. Sallent, A. Roca, and A. Molina (editors), *1905: El jove Einstein en català*. Societat Catalana de Física i Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Institut d'Estudis Catalans, 2005. Presentació a càrred de Josep Maria Pons Ràfols i Antoni Roca Rosell.

[13] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl: *The principle of relativity*. Methuen and Co. 1923. Republicat per Dover el 1952. És una col·lecció d'onze articles originals sobre les teories especial i general de la relativitat, amb notes a càrrec d'Arnold Sommerfeld.

[14] A. Einstein, "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen" (Sobre el principi de relativitat i les conclusions que se'n deriven). *Jahrbuch der Radioactivität und Elektronik* **4** (1907), 411-467.

[15] J.-P. Auffray, *Einstein et Poincaré. Sur les traces de la relativité*. Le Pommier, 2005.

[16] Wolfgang Rindler, *Relativity. Special, General, and Cosmological* (2a edició). Oxford University Press, 2006.

[17] S. Xambó, *Álgebra Lineal y Geometrías Lineales, II.* Eunibar, 1977.

[18] H. Minkowski, *Space and Time*. És una traducció a l'anglès, recollida a [13]*75-91, d'una conferència impartida a la 80a Assemblea alemanya de científics i metges celebrada el 1908 a Colònia.

[19] C.Lavor, S. Xambó, I. Zaplana, *A geometric algebra invitation to space-time physics, robotics and molecular geometry*. Springer, 2018.

[20] S. Xambó, *Real spinorial groups—a short mathematical introduction*. Springer, 2018.

[21] A. Einstein, "Die Grundlage der algemainen Relativitätstheorie" (Els fonaments de la teoria general de la relativitat). *Annalen der Physik* **49**, 1916. Una traducció a l'anglès és recollida al llibre [13]*111-173.

[22] A. Einstein, *The meaning of relativity* (6th edition). Chapman and Hall Ltd, 1956.

[23] A. Einstein, M Grossmann, "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der gravitation. I. Physykalischer Teil von A. Einstein. II. Mathematischer Teil von M. Grossmam" (Esbós d'una teoria generalitzada de la relativitat i una teoria de la gravetat. I. Part física, A. Einstein. II. Part matemàtica, M. Grossmann). Leipzig, Teubner, 1913. 38 pp. Reimpressió de *Zeitschrift für Mathemmatik und Physik*, vol. **62** (1913), pàgines 225-261 (part física, 225-244).

[24] Conferències FME: Des del curs 2003-2004, la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) dedica cada curs a una personalitat històrica. Dels sis primers (dedicats a Henri Poincaré, Albert Einstein, Carl Friedrich Gauss, Leonhard Euler, Bernhard Riemann i Emmy Noether) se'n van publicar sengles volums. Accessibles a UPC Commons. "L'FME dedicà a Einstein el curs 2004-2005. Es volgué així tenir ocasió de commemorar el científic i la seva vasta obra, la influència que els seus treballs han tingut al llarg dels anys i, sobretot, la pervivència fructífera de les seves idees no només en la física i la tecnologia, sinó també en les matemàtiques" (de Prefaci al Volum Einstein (2004-2005)). Per a més informacions, v. CFME.

[25] J. Girbau, *Geometria diferencial i relativitat*, *Publicacions de la SCM*, volum 8. Societat Catalana de Matemàtiques, 2022. Reproducció íntegra i textual de l'edició original de la UAB (1993). Edició a cura de P. Pascual.

[26] A. Einstein, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie" (Cosmological considerations on the general theory of relativity). *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1917. A [13]*177-188 s'inclou una traducció a l'anglès.

[27] S. R. Wadia (editor), *The Legacy Of Albert Einstein: A Collection Of Essays In Celebration Of The Year Of Physics*. World Scientific, 2007.

# Conversa a dues bandes

## Esther Ibañez i Miquel Teixidó, una parella de matemàtics

Soc l'Esther, soc de Barcelona. Vaig estudiar Matemàtiques a la Facultat de Matemàtiques i Estadística a la UPC, on vaig conèixer el Miquel. He fet el doctorat en Matemàtiques al Centre de Recerca Matemàtica i un postdoc fora de Catalunya. Havia estat treballant a l'empresa i aquest setembre hi torno a treballar. No sé on acabaré encara...

Soc el Miquel, soc de Fraga. Vaig venir a Barcelona a estudiar Matemàtiques i Telecomunicacions. Vaig fer el doctorat a la UPC i després vaig canviar el món acadèmic pel món empresarial, en una startup, en la qual treballo actualment. Som parella aproximadament des de l'inici del doctorat i ara tenim una parella de bessons, un nen i una nena, que aquest setembre fan 2 anys. Bé, la vida canvia molt, però ens hi adaptem.

**Esther:** Vam estudiar junts la llicenciatura i anàvem a les mateixes classes. Ens portàvem bé, però cadascú tenia les seves vides. Després, més endavant, vam ser parella. De fet, és prou habitual trobar parelles de matemàtics.

**Miquel:** Suposo que el fet d'haver estudiat la mateixa carrera fa que vegis el món de forma semblant... Crec que això és el que d'alguna manera pesa més. A més, evidentment, hi ha la convivència durant uns quants anys de la carrera, on hem passat pel mateix.

**Esther:** Sí, jo crec que veus les coses de forma similar, o les planteges de forma similar. En general, es tenen més coses en comú. És important la forma de pensar i d'enfocar els problemes, o aprendre de les coses.

**Mirem una mica més endarrere, per què vam fer matemàtiques?**

**Esther:** A mi sempre m'han agradat les matemàtiques. A l'institut vaig tenir bons professors, com per exemple, la Montserrat Rasclosa, que també estava implicada en el Cangur i vaig participar en aquests programes. Això engresca més, perquè veus que hi ha més coses a part de classe. Al final, l'últim any no ho tenia clar perquè hi ha moltes carreres, i vaig anar a les portes obertes de les universitats. Però vaig tornar al mateix punt de sortida: fer mates, perquè m'agraden.

**Miquel:** Quan estava a 3r d'ESO, el meu professor de matemàtiques d'aleshores, Xep Mallol, em va començar a introduir en el món de la prova Cangur, i les olimpíades. Això va ser el que em va portar més cap a fer matemàtiques. Vaig participar en les olimpíades ja a 1r de batxillerat i em vaig classificar per a les proves internacionals. Per mi, era natural fer Matemàtiques i ho vaig fer juntament amb Telecos. En aquell moment m'agradava més la física, però no hi havia mates i física, i vaig triar el més semblant.

**Esther:** De la meva classe vam anar dues persones a estudiar matemàtiques. Era un cas una mica particular, perquè era un institut públic d'un barri obrer, l'IES Bernat Metge, amb pocs alumnes, però cada any en sortia gent que anava a fer matemàtiques. D'un curs més hi havia un altre noi, d'un curs menys també. Crec que influeixen molt els professors. Nosaltres, per sort, tots els professors que teníem eren matemàtics, que no sempre passa, i motivats.... La Montserrat estava connectada amb tot el